

## ДЕКОМПОЗИЦИЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ РУДНОГО ТИПА МОНТАЖНЫМ МЕТОДОМ

© 2019 А.С. Долгаль

*Горный институт Уральского отделения РАН, г. Пермь, 614007;  
e-mail: dolgal@mi-perm.ru*

Рассматривается решение нелинейной обратной задачи гравirazведки в сеточном классе источников поля при наличии в разрезе аномалиеобразующих тел, обладающих положительными и отрицательными эффективными плотностями. В этом случае весьма сильно проявляется практическая эквивалентность и снижается достоверность результатов количественной интерпретации. На примере монтажного метода рассматривается возможность декомпозиции обратной задачи на две отдельные вычислительные процедуры. Это реализуется путем предварительного разделения гравитационного поля на составляющие, обусловленные объектами с разнознаковыми эффективными плотностями. Используется система эквивалентных источников, последовательно погружающихся на глубину, аппроксимирующих интерпретируемое поле. Экспериментально установлено, что при некоторой глубине расположения источников возможно достаточно точное восстановление «положительной» и «отрицательной» компонент. Для каждой из них отдельно выполняется решение обратной задачи, затем осуществляется синтез полученных результатов — построение единой геоплотностной модели. Таким образом, обеспечивается возможность полной автоматизации аддитивных технологий интерпретации. Представлены модельные примеры, иллюстрирующие предлагаемый подход.

*Ключевые слова: гравirazведка, интерпретация, обратная задача, декомпозиция, эффективная плотность, аппроксимация.*

### ВВЕДЕНИЕ

Существует классификация геоплотностных моделей, которая выделяет три основных типа пространственного распределения аномалиеобразующих масс: рудный, структурный и сложный. Этим моделям отвечают соответствующие типы обратных задач гравirazведки (ОЗГ), в общем случае характеризующиеся разной степенью неоднозначности получаемых результатов (Гравirazведка ..., 1990). В задачах рудного типа носителями масс являются конечные односвязные (попарно не пересекающиеся) объемы, т.е. геоплотностной разрез представлен совокупностью локальных аномалиеобразующих тел, находящихся в однородной по плотности вмещающей среде. Обратные задачи рудного типа принято считать наиболее простыми в теоретическом плане, т.к. в случае тел постоянной

плотности существуют достаточно естественные классы тел, для которых при известной плотности гарантирована единственность решения обратной задачи (Принципы ..., 2011).

Постановки обратных задач, в которых присутствуют объекты с эффективными плотностями разных знаков, обычно ассоциируются у геофизиков с ростом влияния  $\varepsilon$ -эквивалентности. В качестве примера можно привести высказывание из работы (Маловичко и др., 1989, с. 142), где после классификации решений обратной задачи, отмечено следующее: «Все рассмотренные решения получены при условии, что постоянная или переменная аномальная плотность имеет один знак, т.е. является либо положительной, либо отрицательной. Введение аномальной плотности другого знака неограниченно расширяет возможности получения различных решений». Предельным случаем

являются распределения плотности в нижнем полупространстве, не порождающие внешнего гравитационного поля, называемые аннигиляторами (например — система двух шаров с совпадающими центрами или аннигилятор Бродского-Страхова), отвечающие условиям леммы П.С. Новикова (Блох, 2009; Жданов, 2007).

В реальных ситуациях, при наличии в геологическом разрезе сближенных возмущающих объектов, обладающих эффективной плотностью разного знака, происходит частичная компенсация (аннигиляция) их аномальных эффектов. Аннигиляция может заметно уменьшать амплитуду суммарного гравитационного поля и, соответственно, приводить к существенным ошибкам в определении параметров аномалиеобразующих тел. Эти ошибки будут иметь место как при определении интегральных характеристик масс (Булах, 2010), так при оценке местоположения особых точек гармонических функций, аппроксимирующих суммарное поле (Блох и др., 1993), т.е. даже при применении теоретически однозначных методов количественной интерпретации аномалий силы тяжести. В настоящей статье представлена попытка уменьшения степени неоднозначности решения ОЗГ монтажным методом путем приближенного восстановления «разнознаковых» составляющих интерпретируемого гравитационного поля с применением истокообразной аппроксимации.

### МОНТАЖНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ

В середине 1970-х годов с небольшим интервалом по времени были опубликованы работы (Овчаренко, 1975) и (Страхов, Лапина, 1976), в которых был предложен по существу новый метод решения нелинейной ОЗГ в сеточных классах источников поля, названный монтажным. Монтажному методу и созданным на его основе интерпретационным технологиям посвящено достаточно много публикаций, в частности (Балк, Долгаль, 2009; Долгаль и др., 2012).

Монтажный метод базируется на использовании дискретного описания геоплотностной среды, когда объем (носитель) аномалиеобразующих масс представляется в виде объединения некоторого числа элементарных геометрических фигур (к примеру, в 2D варианте это квадраты, в 3D варианте — кубы), плотность каждой из которых принимается постоянной. Эти фигуры, которые называются элементами замощения  $\omega_\alpha$ , плотно прилегают друг другу по целой стороне, образуя регулярное замощение изучаемого фрагмента геологической среды. Объединение некоторого числа элементов замощения  $\omega_\alpha$  с постоянной плотностью  $\sigma$  в пределах области  $\Omega$

называется конфигурационным распределением масс. Основные операции в классе конфигурационных распределений масс выполняются с использованием понятий ядра  $Y[\Omega]$ , оболочки  $O[\Omega]$  и границы  $L[\Omega]$  конфигурации  $\Omega$ :  $Y[\Omega]$  — суть множество элементов  $\omega_\alpha \in \Omega$ ;  $O[\Omega]$  — множество всех элементов  $\omega_\alpha \notin Y[\Omega]$ , граничащих с элементами ядра  $Y[\Omega]$ ;  $L[\Omega]$  — множество элементов  $Y[\Omega]$ , контактирующих с элементами  $O[\Omega]$ .

Чтобы облегчить понимание дальнейшего материала, ниже кратко охарактеризуем алгоритм регулируемой направленной кристаллизации (РНК), наиболее широко применяющийся в настоящее время. В простейшей постановке ОЗГ для изолированного тела  $\Omega^T$  известной плотности  $\sigma^T > 0$ , принцип РНК состоит в том, чтобы, отправляясь от заданной связной конфигурации  $\Omega^0$  (которой может являться единственный элемент  $\omega_\alpha$  — центр кристаллизации) выстроить конечную последовательность  $\Omega^0, \Omega^1, \Omega^2, \dots$ , имеющую пределом некоторую конфигурацию  $\Omega^*$ . Гравитационное поле  $\Delta g^*$  конфигурации  $\Omega^*$  при подобранной плотности  $\sigma^* \approx \sigma^T$ , согласуется с интерпретируемым гравитационным полем

$$\Delta g : \|\Delta g - \Delta g^*\|_{L^2} \leq \varepsilon.$$

Очередное приближение  $\Omega^n$

образуется путем внесения в ядро  $Y[\Omega^n]$  какого-то одного элемента из  $O[\Omega^{n-1}]$ , обеспечивающего наименьшую среднеквадратическую невязку подбора  $\varepsilon$ . При переходе от конфигурации  $\Omega^{n-1}$  к конфигурации  $\Omega^n$  учитываются основная априорная информация, которой обычно располагает интерпретатор о местоположении, форме и размерах аномалиеобразующих тел. Использование простейших логических операций с индексами  $\alpha$  элементов замощения  $\omega_\alpha \in L[\Omega]$  позволяет легко осуществлять эффективный контроль за соблюдением различных априорных ограничений топологического характера (Балк, 1993). В частности, при решении 2D обратной задачи требование к выпуклости возмущающего объекта обеспечивается соблюдением простого условия: любая вертикальная и горизонтальная прямая должна пересекать его границу не более двух раз.

Проиллюстрируем применение метода РНК на простом модельном примере: в роли носителя масс плотности  $\sigma = 0.3$  г/см<sup>3</sup> используется бесконечно протяженная горизонтальная призма  $S$ , сечением которой служит конфигурация, построенная из 88 квадратных элементов замощения  $\omega_\alpha$  со стороной 25 м. «Наблюдаемые» значения гравитационного поля  $\Delta g$  заданы на профиле в 36 точках с шагом 50 м и осложнены помехой  $\xi$ , имеющей близкое к нулю среднее значение и среднеквадратическое отклонение  $\sim 0.015$  мГал. Помеха сконструирована путем

усреднения (с помощью скользящего окна шириной 5 точек) последовательности значений нормально распределенной случайной величины. Априори предполагается, что искомый аномалиеобразующий объект является односвязным, обладает достаточно гладкой границей, его мощность не превосходит 1 км по латерали и 0.5 км по вертикали, а глубина залегания нижней кромки не превосходит 1 км. Результаты применения РНК для этой модели приведены на рис. 1, 2.

В случае наличия  $k$  тел в моделируемом разрезе с эффективными плотностями  $\sigma_i^T, i=1, k$ , используются монотонные мультипликативные зависимости вида  $\sigma_i^n = (\sigma_i^T / \sigma_1^T) \sigma_1^n$ , где верхний индекс  $n$  — номер итерации. В результате такой нормировки выполнение условия  $\sigma_1^n \cong \sigma_1^T$  автоматически влечет за собой выход эффективной плотности для всех  $k$  аномалиеобразующих тел на заданные значения при завершении итерационного процесса.

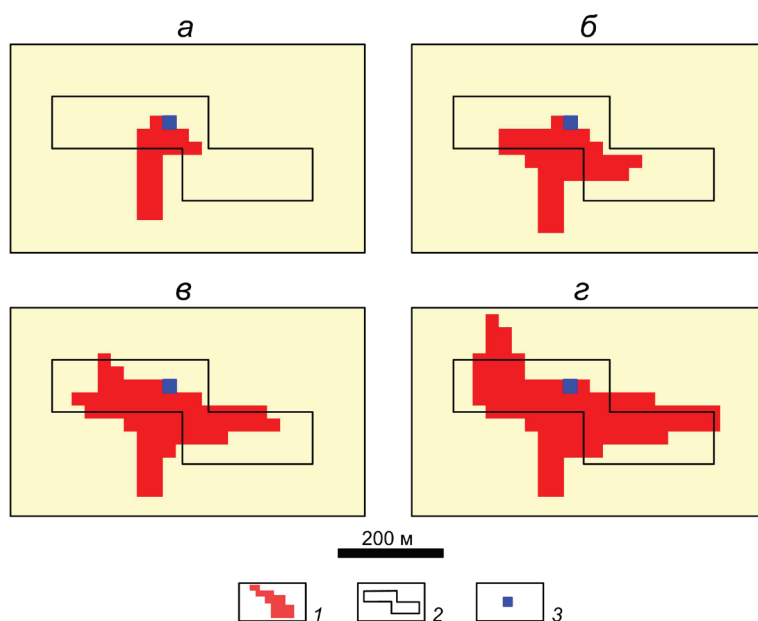
Монтажный подход к решению обратной задачи гравиразведки снимает проблему неустойчивости в ее классическом понимании, т.к. конечная размерность модели и природные ограничения на ее плотностные и геометрические параметры обеспечивают компактность множества возможных решений, а учет разнообразной априорной информации предопределяет геологическую информативность результатов интерпретации. Однако при всех достоинствах этого подхода слабым местом всех известных модификаций метода при решении обратной задачи является условие: эффективные плотности локальных тел должны иметь один знак (быть либо выше, либо ниже плотности вмещающей среды). В противном случае происходит трудно контролируемое перераспределение масс с

эффективной плотностью разного знака, которое будет продемонстрировано ниже, на модельном примере. Аналогичный эффект описан зарубежными коллегами в работе (Samacho et al., 2000).

## МОДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

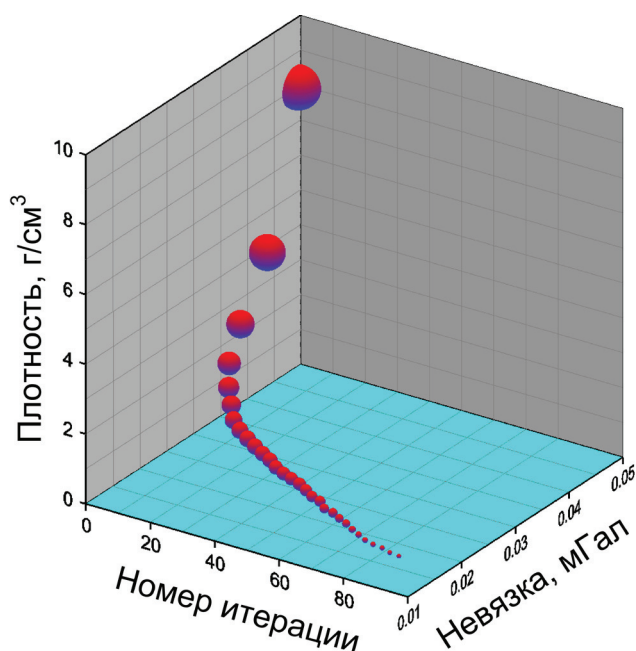
Проиллюстрируем влияние возросшей неопределенности при решении ОЗГ для конкретного случая: разрез включает в себя три 2D призматических тела  $S_1, S_2, S_3$  с эффективными плотностями  $\sigma_1 = 0.15$  г/см<sup>3</sup>,  $\sigma_2 = 0.2$  г/см<sup>3</sup>,  $\sigma_3 = 0.3$  г/см<sup>3</sup> (модель № 1). Гравитационное поле  $\Delta g$  (в редукции Буге) задано на профиле длиной 40 км, с шагом между точками 500 м, его амплитуда изменяется от 2.75 мГал до 13.06 мГал. Предполагается, что все три тела  $S_1, S_2, S_3$  являются односвязными (не содержат «пустот»); обладают достаточно гладкими границами; ограничения на горизонтальную мощность тел составляют 8 км, 10 км, 8 км; на вертикальную — 5 км, 5 км, 8 км, соответственно. Максимальная глубина расположения масс не превышает 12 км. В качестве начального приближения для каждой конфигурации использовался единичный элемент замощения  $\omega_a$  размером 500×500 м. В результате решения обратной задачи методом РНК были построены конфигурации  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ , перекрывающие около 61% площади истинных тел (рис. 3) и обеспечивающие невязку наблюдаемого и модельного полей  $\varepsilon \cong 0.09$  мГал (менее 1% от максимальной амплитуды поля).

Предположим теперь, что тело  $S_2$  имеет пониженную плотность относительно вмещающей среды:  $\sigma_2 = -0.2$  г/см<sup>3</sup> (модель № 2). Значения гравитационного поля  $\Delta g$  для такого модифицированного разреза лежат в диапазоне



**Рис. 1.** Эволюция текущих приближений к решению обратной задачи гравиразведки методом РНК: а —  $n = 20$  итераций ( $\sigma^* = 1.248$  г/см<sup>3</sup>;  $\varepsilon^* = 0.026$  мГал); б —  $n = 40$  итераций ( $\sigma^* = 0.656$  г/см<sup>3</sup>;  $\varepsilon^* = 0.023$  мГал); в —  $n = 60$  итераций ( $\sigma^* = 0.439$  г/см<sup>3</sup>;  $\varepsilon^* = 0.020$  мГал); г — результат интерпретации,  $n = 88$  итераций ( $\sigma^* = 0.298$  г/см<sup>3</sup>;  $\varepsilon^* = 0.016$  мГал): 1 — подобранная модель; 2 — аномалиеобразующая призма; 3 — центр кристаллизации.

**Fig. 1.** The evolution of current approximations to the solution of the inverse problem adjustable directional crystallization gravity prospecting: а —  $n = 20$  iterations ( $\sigma^* = 1.248$  g/cm<sup>3</sup>;  $\varepsilon^* = 0.026$  mGal); б —  $n = 40$  iterations ( $\sigma^* = 0.656$  g/cm<sup>3</sup>;  $\varepsilon^* = 0.023$  mGal); в —  $n = 60$  iterations ( $\sigma^* = 0.439$  g/cm<sup>3</sup>;  $\varepsilon^* = 0.020$  mGal); г — the result of interpretation  $n = 88$  iterations ( $\sigma^* = 0.298$  g/cm<sup>3</sup>;  $\varepsilon^* = 0.016$  mGal): 1 — matched model; 2 — anomaly-forming prism; 3 — the center of crystallization.



**Рис. 2.** График изменения невязки  $\varepsilon^*$  и плотности  $\sigma^*$  масс, распределенных по моделируемой конфигурации  $\Omega^*$ , в итерационном процессе РНК.

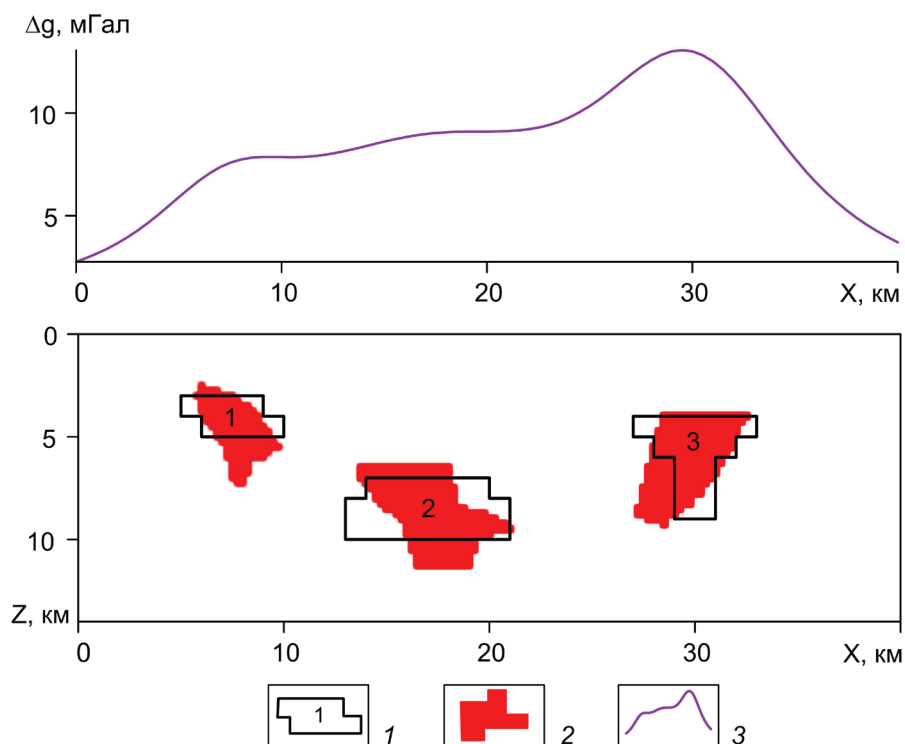
Примечание: диаметр шаров характеризует значения  $\varepsilon^*$ .

**Fig. 2.** Graph of variation of the discrepancy  $\varepsilon^*$  and density  $\sigma^*$  of masses distributed by simulated configuration  $\Omega^*$ , in the adjustable directional crystallization iterative process.

Note: the diameter of the balls characterizes the values of  $\varepsilon^*$ .

от  $-4.08$  мГал до  $8.77$  мГал. Применение метода РНК при такой же априорной информации об источниках дает гораздо худшие результаты: существенное превышение площади конфигураций  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  по сравнению с истинными телами  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 4) при невязке  $\varepsilon \approx 0.09$  мГал. Напомним, что в монтажном методе критерием останова итерационного процесса является выполнение на итерации  $n$  условия  $\sigma_1^n \cong \sigma_1^T$ , а не достижение заданного значения  $\varepsilon$  (в отличие от широко распространенных технологий автоматизированного подбора). Достоверность решения ОЗГ для модели № 2 существенно ниже, чем для модели № 1, при весьма близких значениях  $\varepsilon$ .

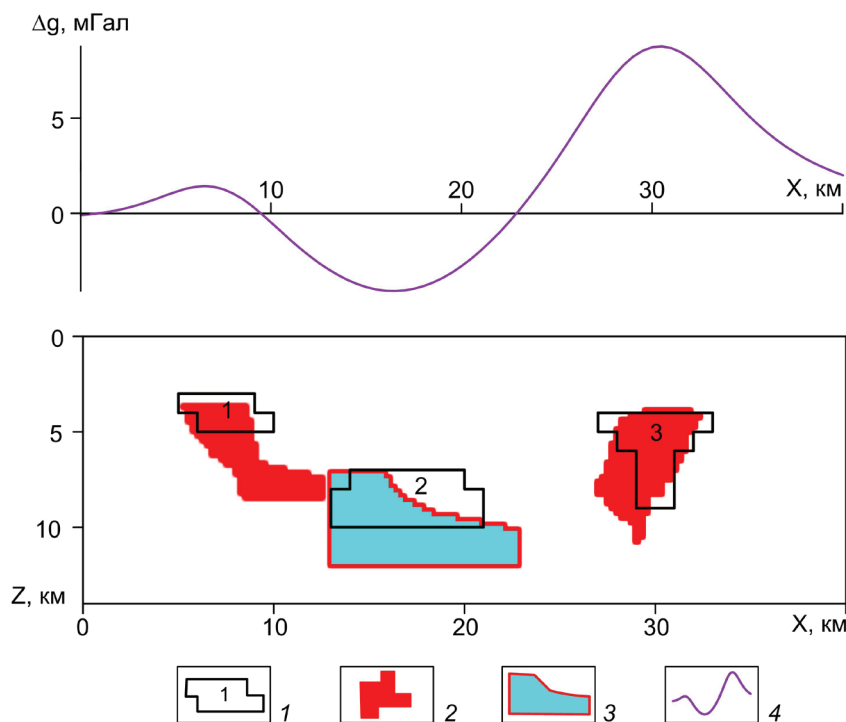
Постановки обратных задач с разнозначными эффективными плотностями в монтажном методе нуждаются в каких-то новых путях их реализации. Предлагается до начала работы монтажного метода выполнять процедуру разделения аномального гравитационного поля  $\Delta g$  на две составляющие  $\Delta g^+$  и  $\Delta g^-$ , отвечающие, соответственно, влиянию источников с положительными и отрицательными эффективными плотностями, с использованием процедуры истокообразной аппроксимации (Аронов, 1990; Долгаль и др., 2016). Таким образом, можно осуществить декомпозицию ОЗГ на две подзадачи для разных компонент гравитационного поля и дальше уже действовать по отработанной схеме метода РНК.



**Рис. 3.** Геоплотностная модель № 1: 1 — аномалиеобразующие объекты  $S_1, S_2, S_3$ ; 2 — подобранные конфигурации  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ; 3 — график интерпретируемого гравитационного поля  $\Delta g$ .

**Fig. 3.** Geodensity model № 1: 1 — anomalous objects  $S_1, S_2, S_3$ ; 2 — selected configurations  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ; 3 — diagram of the interpreted gravitational field  $\Delta g$ .





**Рис. 4.** Геоплотностная модель № 2: 1 — аномалиеобразующие объекты  $S_1, S_2, S_3$ ; 2 — подобранные конфигурации  $\Omega_1, \Omega_3$  с положительной эффективной плотностью; 3 — подобранная конфигурация  $\Omega_2$  с отрицательной эффективной плотностью; 4 — график интерпретируемого гравитационного поля  $\Delta g$ .

**Fig. 4.** Geodensity model № 2: 1 — anomalous objects  $S_1, S_2, S_3$ ; 2 — selected configurations  $\Omega_1, \Omega_3$  with a positive effective density; 3 — selected configuration  $\Omega_2$  with a negative effective density; 4 — a diagram of the interpreted gravitational field  $\Delta g$ .

## РАЗДЕЛЕНИЕ ИНТЕРПРЕТИРУЕМОГО ПОЛЯ НА ДВЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Предположим, что поле  $\Delta g$  задано в  $n$  точках профиля с постоянным шагом  $\Delta x$ , а глубины аномалиеобразующих объектов  $H$  лежат в интервале  $H: 0 \leq H \leq H_2$ . Разместим под каждой точкой бесконечные горизонтальные стержни на глубине  $z \geq \Delta x$  и определим значения их эффективной линейной плотности  $\sigma$  путем решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с точностью  $\delta$ . Восстановим две компоненты поля  $\Delta g^+$  и  $\Delta g^-$  в точках профиля, при этом их сумма будет близка к исходным значениям поля:  $\|\Delta g - (\Delta g^+ + \Delta g^-)\|_{L_2} = \delta$ . Компонента  $\Delta g^+$  обусловлена источниками с положительными эффективными линейными плотностями  $\sigma^+$ , компонента  $\Delta g^-$  — с отрицательными  $\sigma^-$ . Повторим эти операции для ряда глубин  $z_i$  расположения стержней с постоянным шагом  $p$  по вертикали:  $1p, 2p, 3p, \dots, mp$ ;  $mp \geq H_2$ . В результате будет получено  $m$  вариантов разделения интерпретируемого поля на две составляющие  $\Delta g^+$  и  $\Delta g^-$ , отвечающих дискретному набору значений глубин  $z_i, i=1, m$  эквивалентных источников. Как показывают результаты многочисленных вычислительных экспериментов, всегда найдется такая глубина  $z_k$ , при которой каждая из аномалий  $\Delta g_k^+$  и  $\Delta g_k^-$  с удовлетворительной точностью приближает соответствующую составляющую интерпретируемого поля  $\Delta g$ . При этом качество аппроксимации «разнознаковых» компонент поля  $\Delta g^+$  и  $\Delta g^-$ , монотонно ухудшается с ростом расстояния  $\|i-k\|$ .

К сожалению, до конца объяснить этот факт с теоретических позиций пока не удалось.

Рассмотрим конкретный пример разделения интерпретируемого поля гравитационного поля  $\Delta g$ , созданного геоплотностной моделью № 2, на две составляющие. Число точек профиля  $n=81$ , шаг между точками  $\Delta x=500$  м, шаг глубин  $p=\Delta x/2=250$  м. Мы ограничились интервалом глубин  $1.5 \text{ км} \leq H \leq 12 \text{ км}$  при истокообразной аппроксимации, т.е. получили  $m=43$  варианта разделения поля  $\Delta g$ . Ранее уже отмечалось, что априори предполагается отсутствие в разрезе возмущающих объектов ниже 12 км.

Во всех случаях величина  $\delta \leq 0.1$  мГал, под точностью восстановления компоненты поля подразумевается ее отличие  $\sigma^+$  или  $\sigma^-$  от истинной составляющей (определенной путем решения прямой задачи гравиразведки) в евклидовой метрике. Наилучшие приближения компонент  $\Delta g_k^+$  и  $\Delta g_k^-$  получены, когда горизонтальные стержни помещаются на глубине 5 км, причем прослеживается четкая зависимость качества разделения гравитационного поля от глубины аппроксимационной конструкции (таблица, рис. 5). Графики «разнознаковых» компонент поля  $\Delta g$  для  $z_{15}=5$  км представлены на рис. 6.

В процессе истокообразной аппроксимации, при решении СЛАУ вида  $\sigma F = \Delta g$ , где  $F$  — вектор гравитационных эффектов стержней при  $\sigma=1$ , целесообразно использовать регуляризацию. В данном случае вводились ограничения вида  $|\sigma_{j+1} - \sigma_j| \leq \Delta, j=1, n-1$  на массы эквивалентных источников, обеспечивающие сглаживание функции  $\sigma = \sigma(x)$  (рис. 7).

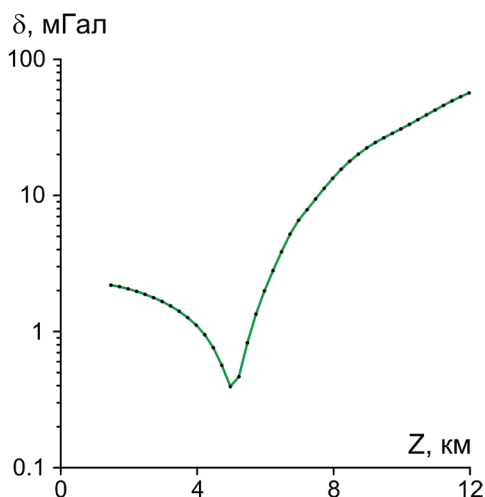
# ДОЛГАЛЬ

Результаты разделения интерпретируемого гравитационного поля на «разнознаковые» компоненты  $\Delta g^+$  и  $\Delta g^-$ . Results of the separation of the interpreted gravitational field on the «different» components  $\Delta g^+$  and  $\Delta g^-$ .

Глубина $z$ , км	Точность $\delta$ , мГал	Точность восстановления компонент поля		Суммарная эффективная линейная плотность стержней	
		$\Delta g^+$ , мГал	$\Delta g^-$ , мГал	$\sigma^+$ , г/см <sup>3</sup>	$\sigma^-$ , г/см <sup>3</sup>
1.5	0.005	2.19	2.19	2.97	-1.34
1.75	0.005	2.13	2.13	3.04	-1.38
2	0.005	2.05	2.05	3.14	-1.47
2.25	0.005	1.97	1.97	3.26	-1.56
2.5	0.005	1.87	1.87	3.39	-1.67
2.75	0.005	1.77	1.77	3.54	-1.79
3	0.005	1.66	1.66	3.69	-1.92
3.25	0.005	1.53	1.53	3.86	-2.07
3.5	0.005	1.40	1.40	4.04	-2.24
3.75	0.005	1.26	1.26	4.24	-2.42
4	0.005	1.11	1.11	4.46	-2.61
4.25	0.005	0.94	0.94	4.71	-2.84
4.5	0.005	0.76	0.76	4.99	-3.11
4.75	0.005	0.56	0.56	5.33	-3.43
<b>5</b>	<b>0.005</b>	<b>0.39</b>	<b>0.39</b>	<b>5.76</b>	<b>-3.84</b>
5.25	0.005	0.46	0.46	6.30	-4.37
5.5	0.005	0.82	0.82	6.96	-5.02
5.75	0.005	1.34	1.34	7.75	-5.80
6	0.005	1.98	1.98	8.71	-6.74
6.25	0.005	2.79	2.79	9.91	-7.92
6.5	0.005	3.85	3.85	11.44	-9.45
6.75	0.005	5.18	5.18	13.39	-11.39
7	0.006	6.56	6.56	15.44	-13.43
7.25	0.007	7.84	7.84	17.42	-15.39
7.5	0.008	9.41	9.41	19.81	-17.76
7.75	0.009	11.25	11.25	22.64	-20.56
8	0.010	13.33	13.33	25.88	-23.78
8.25	0.012	15.58	15.58	29.42	-27.31
8.5	0.015	17.84	17.84	33.06	-30.92
8.75	0.020	20.07	20.07	36.73	-34.56
9	0.025	22.32	22.32	40.49	-38.30
9.25	0.030	24.47	24.47	44.18	-41.96
9.5	0.035	26.49	26.49	47.77	-45.53
9.75	0.041	28.56	28.56	51.48	-49.23
10	0.046	30.77	30.77	55.47	-53.19
10.25	0.052	33.21	33.21	59.89	-57.60
10.5	0.056	36.02	36.02	64.97	-62.67
10.75	0.061	39.02	39.02	70.38	-68.07
11	0.067	42.29	42.29	76.24	-73.94
11.25	0.074	45.83	45.83	82.59	-80.30
11.5	0.082	49.47	49.47	89.14	-86.88
11.75	0.091	53.10	53.10	95.72	-93.50
12	0.100	56.62	56.62	102.23	-100.06

Примечание: жирный шрифт отвечает оптимальному варианту разделения интерпретируемого поля на составляющие  $\Delta g^+$  и  $\Delta g^-$  (при  $z_k = 5$  км).

Note: bold type corresponds to the optimal variant of dividing the interpreted field into components  $\Delta g^+$  and  $\Delta g^-$  (with  $z_k = 5$  km).



**Рис. 5.** Зависимость точности  $\delta$  восстановления положительной компоненты интерпретируемого гравитационного поля  $\sigma^+$  в зависимости от глубины залегания эквивалентных источников  $z_i$ .

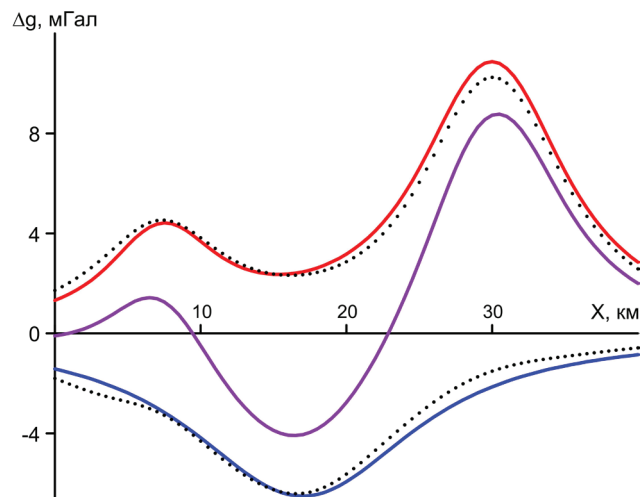
**Fig. 5.** The dependence of the accuracy of recovery positive components of the interpreted gravitational field  $\sigma^+$  depending from the depth of equivalent sources  $z_i$ .

О весьма высокой степени проявления практической эквивалентности для геоплотностной модели № 2 свидетельствует то, что при точности  $\delta$  подбора поля  $\Delta g$ , не превышающей 0.01 мГал (для  $1.5 \text{ км} \leq z_i \leq 8 \text{ км}$ ), суммарные массы источников положительного и отрицательного знаков могут изменяться на порядок и более (таблица). Это неизбежно влечет за собой соответствующие колебания амплитуд при восстановлении составляющих поля  $\Delta g^+$  и  $\Delta g^-$  для разных значений  $z_i$ .

## ДЕКОМПОЗИЦИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ

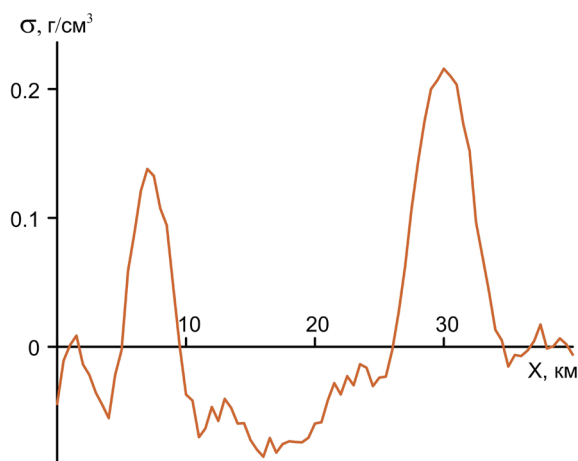
Далее мы можем рассматривать составляющую  $\Delta g_i^+$ ,  $i = \overline{1, n}$  как аномальное поле, которое обусловлено локальными телами положительной эффективной плотности и искать с помощью метода РНК допустимое решение обратной задачи  $\Omega_+^*$ . При этом учитываются априорные ограничения, относящиеся к подбираемым локальным телам.

Аналогично поступим при поиске решения обратной задачи  $\Omega_-^*$  по составляющей  $\Delta g_i^-$ ,  $i = \overline{1, n}$ , когда в числе прочего учитывается априорная информация, касающаяся взаиморасположения локальных тел отрицательной и положительной плотности. Синтез двух наборов конфигураций  $\Omega_+^*$  и  $\Omega_-^*$  является решением исходной обратной задачи (рис. 8). При решении задачи  $\Omega_+^*$  невязка наблюдаемого и модельного полей составила 0.062 мГал; при решении задачи  $\Omega_-^*$  — 0.192 мГал. Суммарная невязка исходного полей и модель-



**Рис. 6.** Графики интерпретируемого гравитационного поля  $\Delta g$  (фиолетовый цвет), его истинных составляющих  $\Delta g^+$  (красный цвет) и  $\Delta g^-$  (синий цвет), а также восстановленных компонент  $\Delta g_k^+$  и  $\Delta g_k^-$ ,  $k = 15$  (черный пунктир).

**Fig. 6.** Diagrams of the interpreted gravitational field  $\Delta g$  (purple color), its true components are  $\Delta g^+$  (red color) and  $\Delta g^-$  (blue color), as well as the restored components  $\Delta g_k^+$  and  $\Delta g_k^-$ ,  $k = 15$  (black dotted line).

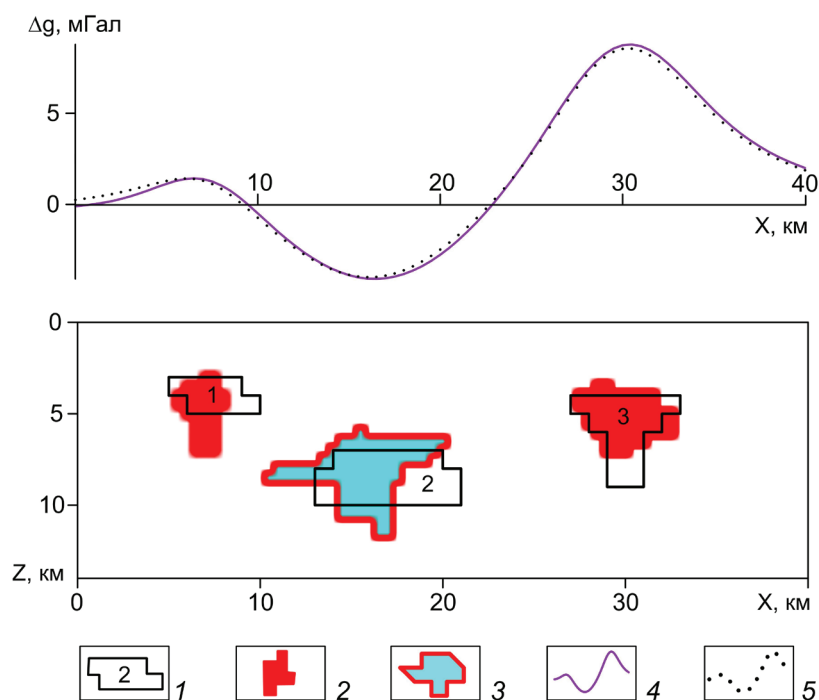


**Рис. 7.** Эффективные линейные плотности стержней, использованных для аппроксимации поля  $\Delta g$ , на глубине  $z_k = 5 \text{ км}$ .

**Fig. 7.** Effective linear density of rods used for field approximation  $\Delta g$ , at a depth of  $z_k = 5 \text{ км}$ .

ного полей равна 0.216 мГал ( $\sim 1.5\%$  от размаха значений  $\Delta g$ ).

Если по компонентам поля удалось построить допустимое решение обратной задачи, удовлетворяющее всем априорным ограничениям и обеспечивающее допустимую величину невязки наблюдаемого и модельного полей, то это является косвенным свидетельством о «хорошем» разделении поля  $\Delta g \cong \Delta g_k^+ + \Delta g_k^-$ . Если удалось построить серию допустимых решений обратной задачи, отвечающих различным глубинам  $z_i$  размещения источников, все они будут включены



**Рис. 8.** Решение обратной задачи гравиразведки для геоплотностной модели № 2: 1 — аномалиеобразующие объекты  $S_1, S_2, S_3$ ; 2 — результат решения задачи  $\Omega_+^*$ : подобранные конфигурации  $\Omega_1, \Omega_3$ ; 3 — результат решения задачи  $\Omega_-^*$ : выбранная конфигурация  $\Omega_2$ ; 4 — график интерпретируемого гравитационного поля  $\Delta g$ ; 5 — график модельного поля  $\Delta g^* = \Delta g^+ + \Delta g^-$ .

**Fig. 8.** The solution of the inverse problem of gravity exploration for geodensity model № 2: 1 — anomalous objects  $S_1, S_2, S_3$ ; 2 — the result of the decision tasks  $\Omega_+^*$ : selected configurations  $\Omega_1, \Omega_3$ ; 3 — the result of the decision tasks  $\Omega_-^*$ : selected configuration  $\Omega_2$ ; 4 — diagram interpretable gravitational field  $\Delta g$ ; 5 — diagram of the model field  $\Delta g^* = \Delta g^+ + \Delta g^-$ .

в множество допустимых решений  $Q$ , с которыми предстоит работать аддитивной технологии интерпретации (Балк, Долгаль, 2016). Следовательно, безразлично, в каком из выбранных вариантов разделение интерпретируемого поля было более правильным.

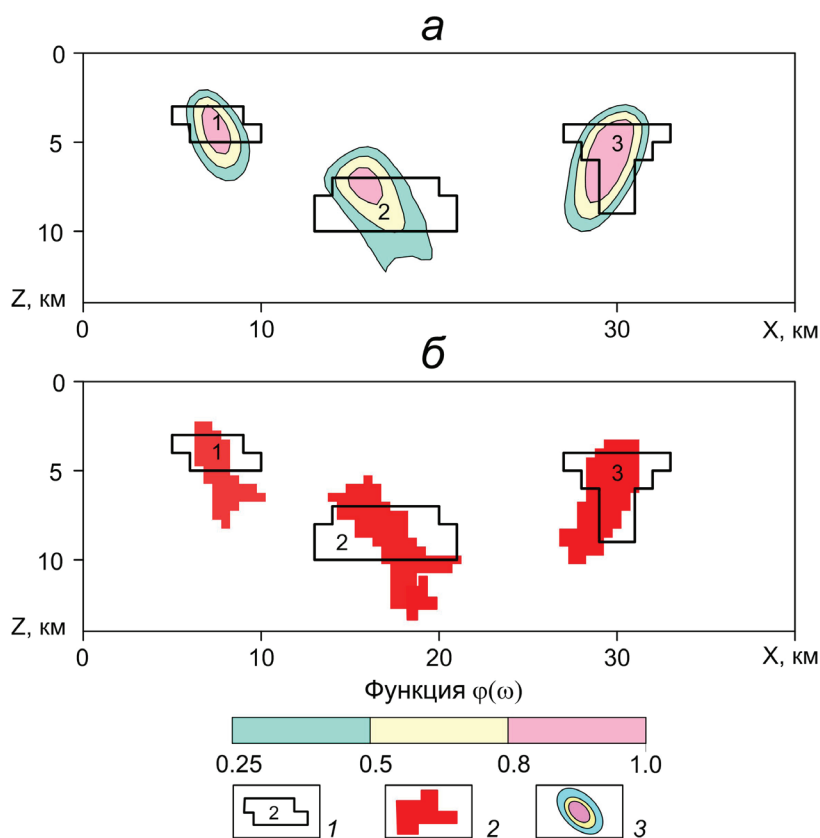
Суть аддитивной технологии интерпретации состоит в использовании новых математических форм представления результатов решения ОЗГ. В качестве конечного продукта количественной интерпретации данных гравиразведки используется «пакет информации», содержащий в себе: 1) одну или несколько оценочных функций; 2) одно или несколько частных решений обратной задачи, согласованных с модифицированными критериями из теории принятия решений (Балк, Долгаль, 2017а).

Располагая множеством допустимых решений ОЗГ  $Q$  можно путем прямой проверки для каждого элемента замощения  $\omega_i$  можно установить число  $m_i$  построенных носителей масс  $\Omega \in Q$ , фрагментом которых он является. Если неизвестный истинный носитель с масс  $S$  находится среди них, то  $\omega_i \subset S$ . Частоту, с которой среди всех  $n$  найденных допустимых носителей встречаются те, для которых  $\omega_i$  является фрагментом, можно взять за оценку искомой вероятности:  $p_i = m_i/n$ . Функцию  $\phi: \phi(\omega_i) = p_i$ , определенную на конечно-элементном замощении геологической среды, назовем оценочной. Как новая математическая форма представления результатов интерпретации функция  $\phi(\omega)$  позволяет локализовать фрагменты изучаемой части пространства, с наиболее высокой вероятностью наличия возмущающих масс.

Информативность результатов интерпретации в терминах оценочной функции  $\phi(\omega)$ , несомненно, значительно выше информативности единичного решения  $\Omega^*$  ОЗГ, но весь интерпретационный процесс нельзя свести к построению такой функции. Для решения многих геологических задач требуется установить предположительные границы аномалиеобразующих тел. Выбор «наилучшего» носителя масс  $\Omega_j \in Q$  можно осуществить с использованием известных критериев принятия решений в условиях неопределенности или риска, например — с помощью критериев Лапласа и минимакса (Балк и др., 2016).

Как очевидно, аддитивные технологии являются достаточно гибкими: 1) существуют различные модификации оценочной функции  $\phi(\omega)$ : функции гарантии, локализации, обнаружения, доверия, надежности и т.п.; 2) частные детерминированные модели источников поля  $\Omega_j$  будут различными, в зависимости от использованного критерия (Балк, Долгаль, 2017б). Пример использования аддитивной технологии интерпретации приведен на рис. 9. Множество  $Q$  содержит 67 решений ОЗГ. Повышенные значения функции локализации  $\phi(\omega)$  позволяют с достаточной для проведения заверочного бурения точностью выделить в разрезе возмущающие объекты. Согласно критерию минимакса с точностью до погрешности аппроксимации истинного (многосвязного) носителя  $\{S_1, S_2, S_3\}$  можно утверждать, что не менее  $\sim 57\%$  площади подобранных тел  $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$  принадлежат этому носителю.





**Рис. 9.** Результаты применения аддитивной технологии интерпретации для геоплотностной модели № 1: а — функция локализации  $\varphi(\omega)$ ; б — модель источников поля, отвечающая критерию минимакса: 1 — аномалиеобразующие объекты  $S_1, S_2, S_3$ ; 2 — подобранные конфигурации  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ; 3 — изолинии функции  $\varphi(\omega)$ .

**Fig. 9.** The results of the used additive interpretation technology for geodensity model № 1: а — localization function  $\varphi(\omega)$ ; б — field source model that meets the minimax criterion: 1 — anomalies forming objects  $S_1, S_2, S_3$ ; 2 — matched configurations  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ; 3 — isolines of the function  $\varphi(\omega)$ .

## ВЫВОДЫ

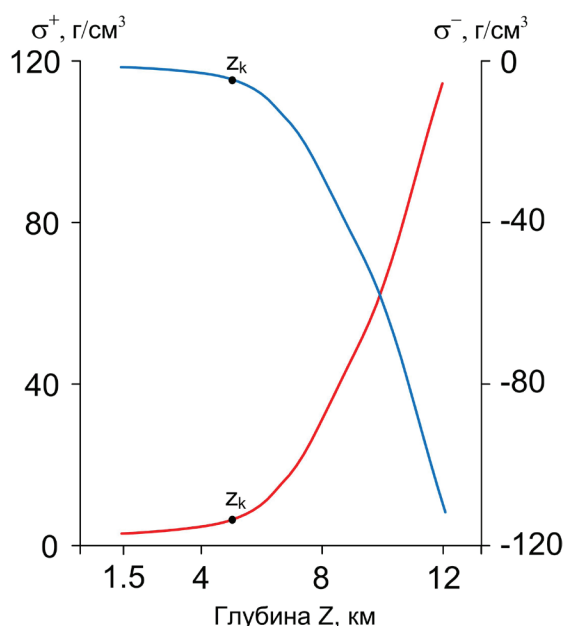
Существенным ограничением для применения всех известных модификаций монтажного метода являлось наличие в геологическом разрезе тел с положительной и отрицательной эффективной плотностью. Оно вызвано особенностями критерия прерывания итерационного процесса и негативным эффектом перераспределения масс с эффективной плотностью разного знака. Попытки снять его, используя внутренние резервы монтажного метода, результатов не дали. Предлагается осуществить декомпозицию ОЗГ на две подзадачи для компонент гравитационного поля  $\Delta g^+$  и  $\Delta g^-$ , каждая из которых обусловлена объектами, обладающими эффективной плотностью одного знака. Для выделения этих компонент используется процедура истокообразной аппроксимации интерпретируемого поля при последовательном увеличении глубин  $z$  эквивалентных источников.

Экспериментально установлено, что при некоторой глубине  $z_k$  разделение поля  $\Delta g$  на составляющие  $\Delta g_k^+$  и  $\Delta g_k^-$  происходит с удовлетворительной для решения практических задач точностью  $\delta^+$  и  $\delta^-$  (как правило  $\delta^+ \cong \delta^-$ ). Зависимости  $\Delta \delta^+ = f(z)$  и  $\Delta \delta^- = f^*(z)$  для всех использованных при исследовании геоплотностных моделях имеют единственный, четко выраженный, минимум. Расположение аппроксимационной конструкции на уровне  $z = z_k$  отвечает условию

близости суммарных масс эквивалентных источников массам аномалиеобразующих тел.

В практических задачах при выборе глубин  $z_k$  погружения источников можно опираться на геологические сведения (например — о глубинах фундамента для платформенных территорий), на мощность гравиактивного слоя, определенную статистическим путем (Глазнев и др., 2014), на среднюю предполагаемую глубину залегания возмущающих объектов в изучаемом разрезе. Также представляется целесообразным ограничить максимальную глубину  $z_{\max}$  слабо-градиентной левой частью кривых  $\Delta \sigma^+ = \phi(z)$ ,  $\Delta \sigma^- = \phi^*(z)$ , в пределах которой изменение суммарной эффективной плотности источников не превышает одного порядка (таблица, рис. 10). Дополнительным признаком для ограничения сверху величины  $z_{\max}$  может служить рост погрешности  $\delta$  при решении СЛАУ.

Решение проблемы разнознаковых плотностей обеспечивает реальную возможность полной автоматизации аддитивных технологий интерпретации гравитационных аномалий, являющихся альтернативой современным диалоговым системам инверсии (Alvers et al., 2015). Эти технологии являются достаточно универсальным математическим инструментом, позволяющим успешно устранить противоречие между фактом существования множества равноправных вариантов интерпретации и попыткой охарактеризовать множество  $Q$  каким то одним



**Рис. 10.** Зависимости суммарной эффективной линейной плотности стержней  $\sigma^+$  (красный цвет) и  $\sigma^-$  (синий цвет) от глубины  $z$  аппроксимационной конструкции для геоплотностной модели № 2.

**Fig. 10.** Dependences of total effective linear density rods  $\sigma^+$  (red color) and  $\sigma^-$  (blue color) from depth  $z$  approximation constructions for geodensity model № 2.

его элементом — оптимальным решением обратной задачи.

Хорошо известен принцип дополнительности, сформулированный Нильсом Бором (Niels Henrik David Bohr) в 1927 г, согласно которому для полного описания квантово-механических явлений необходимо применять два взаимоисключающих («дополнительных») набора классических понятий, совокупность которых даёт исчерпывающую информацию об этих явлениях (Методологические ..., 1975). В дальнейшем появилась концепция дополнительности, охватывающая не только физику, но и биологию, психологию, культурологию и др. гуманитарные науки. С методологических позиций аддитивные технологии, объединяющие в себе функционально-аналитический и вероятностно-статистический подходы к количественной интерпретации данных гравиразведки, могут рассматриваться, как еще одно естественно-научное воплощение данной концепции.

Область применения аппроксимационного способа выделения «разнозначных» составляющих поля  $\Delta g^+$  и  $\Delta g^-$ , не ограничивается решением ОЗГ. Этот способ может быть реализован в 3D варианте и использован при решении широкого круга геологических задач, в т.ч. поискового характера. Знак локальной аномалии силы тяжести является одним из основных диагно-

стических признаков для многих типов полезных ископаемых.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-05-00654 А).

#### Список литературы [References]

- Аронов В.И. Методы построения карт геолого-геофизических признаков и геометризация залежей нефти и газа на ЭВМ. М.: Недра, 1990. 301 с. [Aronov V.I. Metody postroeniya kart geologo-geofizicheskikh priznakov i geometrizaciya zalezhej nefti i gaza na EVM. M.: Nedra, 1990. 301 p. (in Russian)].
- Балк П.И. Использование априорной информации о топологических особенностях источников поля при решении обратной задачи гравиметрии в рамках монтажного подхода // Физика Земли. 1993. № 5. С. 59–71 [Balk P.I. The Use of A Priori Information on the Topology of the Field Sources in the Solution of the Inverse Problem of Gravimetry in the Framework of Assembly Solution // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. 1993. № 5. P. 59–71].
- Балк П.И., Долгаль А.С. Аддитивные технологии количественной интерпретации гравитационных аномалий // Геофизика. 2016. № 1. С. 43–47 [Balk P.I., Dolgal' A.S. Additivnye tekhnologii kolichestvennoj interpretacii gravitacionnyh anomalij // Geofizika. 2016. № 1. P. 43–47 (in Russian)].
- Балк П.И., Долгаль А.С. Новые возможности повышения информативности количественной интерпретации гравитационных аномалий // ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 461–465. <https://doi.org/10.7868/S0869565217280234> [Balk P.I., Dolgal A.S. New possibilities of increasing the informativeness of quantitative interpretation of gravity anomalies // Doklady Earth Sciences. 2017. V. 476. № 2. P. 1168–1172. <https://doi.org/10.1134/S1028334X17100038>].
- Балк П.И., Долгаль А.С. Обратные задачи гравиразведки как проблема принятия решения в условиях неопределенности и риска // Физика Земли. 2017. № 2. С. 45–61. <https://doi.org/10.7868/S0002333717020016> [Balk P.I., Dolgal A.S. Inverse problems of gravity prospecting as a decision-making problem under uncertainty and risk // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. 2017. T. 53. № 2. С. 214–229. <https://doi.org/10.1134/S106935131702001X>].
- Балк П.И., Долгаль А.С. Трехмерные монтажные технологии интерпретации гравиметрических данных // ДАН. 2009. Т. 427. № 3. С. 380–383 [Balk P.I., Dolgal A.S. Three-dimensional assembly technologies for the interpretation of gravimetric data // Doklady Earth Sciences. 2009. V. 427. № 2. P. 971–974].
- Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Минимаксный подход в обратных задачах геофизики // Физика Земли. 2016. № 2. С. 96–108. <https://doi.org/10.7868/S0002333716020022> [Balk P.I., Dolgal A.S., Balk T.V., Khristenko L.A. Minimax approach to inverse problems of geophysics // Izvestiya,

- Physics of the Solid Earth. 2016. V. 52. № 2. P. 242–253. <https://doi.org/10.1134/S1069351316020026>].
- Блох Ю.И.* Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий. Учебное пособие. [Электронный ресурс]. 2009. 232 с. Режим доступа : [www.sigma3d.com](http://www.sigma3d.com) [*Bloh Yu.I.* Interpretaciya gravitacionnyh i magnitnyh anomalij. Uchebnoe posobie. (Elektronnyj resurs). 2009. 232 p. Rezhim dostupa: [www.sigma3d.com](http://www.sigma3d.com) (in Russian)].
- Блох Ю.И., Каплун Д.В., Коняев О.Н.* Возможности интерпретации потенциальных полей методами особых точек в интегрированной системе «Сингуляр» // Известия вузов. Геология и разведка. 1993. № 6. С. 123–127 [*Bloh YU.I., Kaplun D.V., Konyayev O.N.* Vozmozhnosti interpretacii potencial'nyh polej metodami osobyh toчек v integrirovannoj sisteme «Singulyar» // Izvestiya vuzov. Geologiya i razvedka. 1993. № 6. P. 123–127 (in Russian)].
- Булах Е.Г.* Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. Киев: изд-во «Наукова думка», 2010. 464 с. [*Bulah E.G.* Pryamyie i obratnye zadachi gravimetrii i magnitometrii. Kiev: izd-vo «Naukova dumka», 2010. 464 p. (in Russian)].
- Глазнев В.Н., Муравина О.М., Воронова Т.А., Холин В.М.* Оценка мощности гравиактивного слоя земной коры Воронежского кристаллического массива // Вестник ВГУ. Сер. Геология. Воронеж, 2014. № 4. С. 78–84 [*Glaznev V.N., Muravina O.M., Voronova T.A., Holin V.M.* Ocenka moshchnosti graviaktivnogo sloya zemnoj kory Voronezhskogo kristallicheskogo massiva // Vestnik VGU. Ser. Geologiya. Voronezh, 2014. № 4. P. 78–84 (in Russian)].
- Гравиразведка: Справочник геофизика / Под ред. Мудрецов Е.А., Веселова К.Е. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Недра, 1990. 607 с. [Gravirazvedka: Spravochnik geofizika / Eds. Mudrecova E.A., Veselov K.E. 2-e izd., pererab. i dop. M.: Nedra, 1990. 607 p. (in Russian)].
- Долгаль А.С., Балк П.И., Деменев А.Г. и др.* Использование метода конечных элементов при интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки // Вестник КРАУНЦ. 2012. № 1. Вып. 19. С. 108–127 [*Dolgal' A.S., Balk P.I., Demenev A.G. et al.* The Finite-element Method Application for interpretation of Gravity and Magnetic Data // Vestnik KRAUNTs. Nauki o Zemle. 2012. № 1(19). P. 108–127 (in Russian)].
- Долгаль А.С., Костицын В.И., Новикова П.Н., Пугин А.В.* Алгоритмы аппроксимации геопотенциальных полей истокообразными функциями // Геофизика. 2016 № 5. С. 4–10 [*Dolgal' A.S., Kosticyn V.I., Novikova P.N., Pugin A.V.* Algoritmy approksimacii geopotencial'nyh polej istokoobraznymi funkciyami // Geofizika. 2016 № 5. P. 4–10 (in Russian)].
- Жданов М.С.* Теория обратных задач и регуляризация в геофизике. М.: Научный мир, 2007. 710 с. [*Zhdanov M.S.* Teoriya obratnyh zadach i regularizaciya v geofizike. M.: Nauchnyj mir, 2007. 710 p. (in Russian)].
- Маловичко А.К., Костицын В.И., Тарунина О.Л.* Детальная гравиразведка на нефть и газ. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Недра, 1989. 224 с. [*Malovichko A.K., Kosticyn V.I., Tarunina O.L.* Detal'naya gravirazvedka na neft' i gaz. 2-e izd., pererab. i dop. M.: Nedra, 1989. 224 p.]
- Методологические принципы физики. История и современность. М.: Наука, 1975. 512 с. [Metodologicheskie principy fiziki. Istoriya i sovremennost'. M.: Nauka, 1975. 512 p. (in Russian)].
- Овчаренко А.В.* Подбор сечения двухмерного тела по гравитационному полю // Вопросы нефтяной и рудной геофизики. Алма-Ата: Изд-во Казахского политехн. ин-та, 1975. Вып. 2. С. 71–75 [*Ovcharenko A.V.* Podbor secheniya dvuhmernogo tela po gravitacionnomu polyu // Voprosy neftyanoy i rudnoj geofiziki. Alma-Ata: Izd-vo Kazahskogo politekhn. in-ta, 1975. Vyp. 2. P. 71–75 (in Russian)].
- Принципы метода гравиметрии / А. А. Кауфман, Р. Хансен; пер. с англ. В. А. Ефремова и Т. А. Тимакиной. Тверь: Междунар. ассоц. «АИС», 2011. 359 с. [Principles of The Gravitational Method. / Alex Kaufman, Richard Hansen. Elsevier Science, 2007. 258 p. ].
- Страхов В.Н., Лапина М.И.* Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии // ДАН. 1976. 227. № 2. С. 344–347 [*Strakhov V.N., Lapina M.I.* Assembly method for solving the inverse problem of gravimetry // Doklady Earth Sciences. 1976. V. 227. № 2. P. 344–347].
- Alvers M.R., Barrio-Alvers L., Bodor C. et al.* Quo vadis inversion? // First Break. 2015. V. 33. № 4. P. 65–73.
- Camacho A.G., Montesinos F.G., Vieira R.* Gravity inversion by means of growing bodies // Geophysics. 2000. V. 65. № 1. P. 95–101. <http://dx.doi.org/10.1190/1.1444729>.

ДОЛГАЛЬ

**DECOMPOSITION OF THE GRAVITATIONAL FIELD INVERSION  
USING THE ASSEMBLY METHOD FOR THE ORE MODEL**

© 2019 A.S. Dolgal

*Mining Institute of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm;  
e-mail: dolgal@mi-perm.ru*

The paper presents consideration of the solution of the nonlinear inverse problem of gravity exploration in the grid class of field sources if there are anomalies in the section that have positive and negative effective densities. In this case, practical equivalence is very strong and the reliability of the results of quantitative interpretation decreases. Based on the assembly method the author considers the possibility of decomposing the inverse problem into two separate computational procedures. It is implemented using pre-separation of the gravitational field into components caused by objects with different effective densities. The author used a system of equivalent sources that were successively plunged to a depth approximating the interpreted field. Experiments showed that with a certain depth of sources, it is possible to rather accurately restore the «positive» and «negative» components. For each of them, the solution of the inverse problem is separately carried out, then the obtained results are synthesized, i.e. the construction of a unified geodensity model, which makes it possible to provide complete automation of additive interpretation technologies. The paper includes model examples illustrating the proposed approach.

*Keywords: gravity survey, interpretation, inverse problem, decomposition, effective density, approximation.*